論　文

資本資産評価における
インフレーション・リスクの影響

樋　口　和　彦

1．はじめに

資本資産評価モデル（CAPM, Capital Asset Pricing Model, 以下 CAPM と略称）においては，ある資産の評価は，リスクのない利子率と，$E(\widetilde{R}_m)-R_f/\sigma^2(\widetilde{R}_m)$〔$E(\widetilde{R}_m)$：市場ポートフォリオの期待収益率，$R_f$：リスクのない利子率，$\sigma^2(\widetilde{R}_m)$：市場ポートフォリオのリスク〕分のリスク・プレミアムと $\widetilde{R}_m$ $\widetilde{R}_p$〔$\widetilde{R}_p$：資産の収益率〕の共分散 $COV(\widetilde{R}_m,\widetilde{R}_p)$ によって測定されるリスクによってなされるのであるが，その評価モデル構築上の仮定をみても明らかなようにインフレーション・リスクを無視している。

したがって，インフレの激しい環境においての CAPM による資産評価は，いずれかのバイアスをもつことが十分に考えられるのである。本小論においてはこの問題に焦点をおいて，CAPM を検討していく。そこでまず次節で，インフレ要因を CAPM に導入させる理論的基礎となるモッシン〔文献 1〕の理論を検討し，ついでインフレーション要因を加味した CAPM の分析を行うことにする。

2．投資家の行動

市場における様々な証券に対する投資家の行動を分析する。すなわち，投資量と証券の価格ならびに収益特性間の関数関係を明らかにする。

W：投資家の期首の富

Y：投資家の期末の富

r：無危険資産の利子（1＋利子率）

P：危険資産1単位の現行価格

X：危険資産1単位の期末価格（平均μ，分散σ^2）

Z：危険資産への投資量

M：無危険資産への投資額（$M=W-PZ$）

$f(X)$：Xの確率分布

$$\begin{aligned} Y &= rM+ZX \\ &= r(W-PZ)+ZX \\ &= rW+Z(X-rP) \end{aligned}$$

ここでの投資家の期待効用は

$$U=E[u(Y)]=\sum_x u[rW+Z(X-rP)]f(X) \tag{1}$$

$$\frac{dU}{dZ}=E[u'(Y)(X-rP)]=\sum_x u'[rW+Z(X-rP)](X-rP)f(X) \tag{2}$$

となり，最大化の条件により，$E[u'(Y)(X-rP)]=0$となる。ここで二次の効用関数を仮定すると[1)]

$$\begin{aligned} E[(1-2CY)(X-rP)] &= E(X-rP-2CYX+2CYrP) \\ &= \mu-rP-2CE(YX)+2CrPE(Y)=0 \end{aligned} \tag{3}$$

また，

$$\begin{aligned} E(YX) &= E[rWX+Z(X^2-XrP)] \\ &= rW\mu+Z(\mu^2+\sigma^2-rP\mu) \end{aligned} \tag{4}$$

$$E(Y)=rW+Z(\mu-rP) \tag{5}$$

この(4)，(5)式を(3)式に代入すると

$$E[(1-2CY)(X-\gamma P)]=(\mu-\gamma P)(1-2C\gamma W)$$
$$-2CZ[\sigma^2+(\mu-\gamma P)^2]=0 \qquad (6)^{2)}$$

これをZに関して解くと

$$Z=\frac{\mu-\gamma P}{\sigma^2+(\mu-\gamma P)^2}(1/2C-\gamma W) \qquad (7)^{3)}$$

したがって，(7)式に示されるZが，投資家の期待効用を最大にする危険資産への投資額となるのである。

また，マーコビッツモデル[4]においても同様の分析結果を得ることができる。

マーコビッツモデルにおける投資家の効用は，投資家の期末の富の期待値と，標準偏差との関数によって表される。

$$U=f(E,\ S)$$

ただし

$$E=\gamma W+Z(\mu-\gamma P)$$
$$S=\sigma Z$$
$$Z=\frac{E-\gamma W}{\mu-\gamma P}$$
$$S=\frac{\sigma}{\mu-\gamma P}(E-\gamma W)$$

$$U=E-C(E^2+S^2)$$
$$=E-C\left[E^2+\frac{\sigma^2}{(\mu-\gamma P)^2}(E-\gamma W)^2\right] \qquad (8)$$

先と同様に最大化の条件によって

$$\frac{dU}{dE}=1-2C\left[E+\frac{\sigma^2}{(\mu-\gamma P)^2}(E-\gamma W)\right]=0 \qquad (9)$$

したがって，(9)式よりZを求めると先の(7)式が示す結果と同様となる。

$$2C\left[E+\frac{\sigma^2}{(\mu-rP)^2}(E-rW)\right]=1$$

$$2C\left\{rW+Z(\mu-rP)+\frac{\sigma^2}{(\mu-rP)^2}[rW+Z(\mu-rP)-rW]\right\}=1$$

$$Z=\frac{\mu-rP}{\sigma^2+(\mu-rP)^2}(1/2C-rW) \tag{10}$$ [5]

3．投定決定におけるインフレーションの影響

前節において，検討した理論を基礎として，インフレーション要因を加味した CAPM の分析を展開していく。

投資家の期末の富の実質価値は

$$\begin{aligned}\widetilde{Y}&=\sum_j S_j(1+\widetilde{r}_j)+\sum_j B_j(1+\widetilde{r}_b)\\&=\sum_j S_j(1+\widetilde{R}_j-\widetilde{R}_a)+(W-\sum_j S_j)(1+R_f-\widetilde{R}_a)\\&=W(1+R_f-\widetilde{R}_a)+\sum_j S_j(\widetilde{R}_j-R_f)\end{aligned} \tag{11}$$ [6]

ただし

$\widetilde{Y}$ ：投資家の期末の富の実質価値

S_j ：投資家のもつ j 株式の市場価値

$\widetilde{r}_j$ ：j 株式の実質収益率（$\widetilde{r}_j=\widetilde{R}_j-\widetilde{R}_a$）

B_j ：投資家のもつ j 社債の市場価値

$\widetilde{r}_b$ ：j 社債の実質収益率（$\widetilde{r}_b=R_f-\widetilde{R}_a$）

$\widetilde{R}_j$ ：j 株式の名目収益率

$\widetilde{R}_a$ ：インフレ率[7]

W ：投資家の総投資額（$W=\sum_j S_j+B_j$）

R_f ：社債の名目利子率（無危険）

となる。

また，最大化の条件により

$$\frac{\partial E[U(\widetilde{Y})]}{\partial S_j}=E[U'(\widetilde{Y})(\widetilde{R}_j-R_f)]=0 \tag{12}$$

となり，ここで２次の効用関数を仮定すると8)

$$E[U(\widetilde{Y})]=E(\widetilde{Y})-C\{V(\widetilde{Y})+[E(\widetilde{Y})]^2\} \tag{13}$$

また，(11)式より

$$E(\widetilde{Y})=W[1+R_f-E(\widetilde{R}_a)]+\sum_j S_j[E(\widetilde{R}_j)-R_f] \tag{14}$$

$$V(\widetilde{Y})=W^2V(\widetilde{R}_a)+\sum_j\sum_K S_jS_K COV(\widetilde{R}_j,\widetilde{R}_K)$$
$$-2W\sum_j S_j COV(\widetilde{R}_j,\widetilde{R}_a) \tag{15}$$

以上のことからインフレを考慮に入れた CAPM を導くことができる。すなわち，(12)式は

$$\frac{\partial E[U(\widetilde{Y})]}{\partial S_j}=\frac{\partial E[U(\widetilde{Y})]}{\partial E(\widetilde{Y})}\cdot\frac{\partial E(\widetilde{Y})}{\partial S_j}+\frac{\partial E[U(\widetilde{Y})]}{\partial V(\widetilde{Y})}\cdot\frac{\partial V(\widetilde{Y})}{\partial S_j}=0 \tag{16}$$

と表すことができるので，これより

$$[E(\widetilde{R}_j)-R_f][\frac{1}{2C}-E(\widetilde{Y})]=\sum_K S_K COV(\widetilde{R}_j,\widetilde{R}_K)$$
$$-W\,COV(\widetilde{R}_j,\widetilde{R}_a) \tag{17}$$

を導くことができる。この(17)式に関して，j 証券のすべての投資家について集計すると

$$[E(\widetilde{R}_j)-R_f][\Sigma\frac{1}{2C}-\Sigma \dot{E}(\widetilde{Y})]=\Sigma\sum_K S_K COV(\widetilde{R}_j,\widetilde{R}_K)$$
$$-\Sigma W\,COV(\widetilde{R}_j,\widetilde{R}_a) \tag{18}$$

したがって

$$E(\widetilde{R_j})=R_f+\frac{S\,COV(\widetilde{R_j},\widetilde{R_m})-W\,COV(\widetilde{R_j},\widetilde{R_a})}{\Sigma\frac{1}{2C}-\Sigma E(\widetilde{Y})} \tag{19}$$ [9]

ただし

$\widetilde{R_m}$ ：市場全体の名目収益率（市場ポートフォリオの名目収益率）

または，

$$R^*=\frac{1}{\Sigma\frac{1}{2C}-\Sigma E(\widetilde{Y})}$$

$$E(\widetilde{R_j})=R_f+R^*\,b^* \tag{20}$$

ただし

$$b^*=S\,COV(\widetilde{R_j},\widetilde{R_m})-W\,COV(\widetilde{R_j},\widetilde{R_a})$$

となる。この(20)式あるいは(19)式が，インフレを加味した CAPM を示しているのであるが，ここにおいての株式の収益率（名目）の期待値は，リスクのない利子率（名目）に，R^*分のリスク・プレミアムと共分散（b^*）によって測定されるリスク（組織的リスク，Systematic Risk）の合計であることが分かる。

この共分散を構成している要因であるが，ひとつは j 株式の収益率と市場全体の収益率との共分散であるので，これはインフレ要因を加味していない CAPM における組織的リスクそのものである。他方は，j 株式の収益率とインフレ率との共分散である。したがって，この値の如何によって資産の収益率に対する評価が変化することがわかり，CAPM にインフレ要因を導入することの意義が明確となった。

インフレ要因を考慮に入れない CAPM は，$E(\widetilde{R_a})$, $COV(\widetilde{R_j},\widetilde{R_a})$ をそれぞれゼロとおいた

$$E(\widetilde{R_j})=R_f+R\,b_j \tag{21}$$

ただし

$$R=\frac{1}{\Sigma\frac{1}{2C}-\Sigma E(\widetilde{Z})}$$

$$b_j=S\,COV(\widetilde{R}_j,\widetilde{R}_m)$$

$$\widetilde{Z}=W(1+R_f)+\sum_j S_j(\widetilde{R}_j-R_f)$$

である。この(21)式を変形して

$$E(\widetilde{R}_j)=R_f+\lambda\,COV(\widetilde{R}_j,\widetilde{R}_m) \tag{22}$$

ただし

$$\lambda=\frac{S}{\Sigma\frac{1}{2C}-\{W(1+R_f)+S[E(\widetilde{R}_m)-R_f]\}}$$

これよりプロジェクトZの資本コストは（K_z）

$$E(\widetilde{R}_z)>K_z=R_f+\lambda\,COV(\widetilde{R}_z,R_m) \tag{23}$$

ただし

$\widetilde{R}_z$ ：プロジェクトZの内部利益率

$\widetilde{R}_z\equiv(\widetilde{X}_z/I_z)-1$ （$\widetilde{X}_z$ ：総キャッシュ・インフロー，

I_z ：投下資本)

他方(20)式からは

$$E(\widetilde{R}_j)=R_f+\lambda^*[COV(\widetilde{R}_j,\widetilde{R}_m)-g\,COV(\widetilde{R}_j,\widetilde{R}_a)] \tag{24}$$

ただし

$$\lambda^*=\frac{S}{\Sigma\frac{1}{2C}-\{W[1+R_f-E(\widetilde{R}_a)]+S[E(\widetilde{R}_m)-R_f]\}}$$

$$g = W/S = 1 + B/S$$ （S：すべての株式の総市場価値，
B：すべての社債の総市場価値）

が得られ，インフレを考慮に入れた場合のプロジェクトZの資本コスト(K_z^*)は

$$E(\widetilde{R}_z) > K_z^* = R_f + \lambda^*[COV(\widetilde{R}_z, \widetilde{R}_m) - g\,COV(\widetilde{R}_z, \widetilde{R}_a)] \quad (25)$$

となる。この(25)式より，インフレが存在する場合には$E(\widetilde{R}_a)$によって，$\lambda^* < \lambda$となり，インフレ評価分だけ資本コストを引き下げるべきであることが分かり，インフレを考慮にいれない場合の CAPM による資本コスト推計とは異なることを明確に示している。

さらに，MM命題との関連を分析してみると（法人税を考慮しない）

$\widetilde{X}_j$ ：j 企業の営業利益
$V_j = S_j + B_j$ ：j 企業の総価値
$\widetilde{R}_j = (\widetilde{X}_j - R_f B_j) / S_j$ ：j 企業の自己資本利益率
$\widetilde{R}_j^u = \widetilde{X}_j^u / S_j^u = \widetilde{X}_j^u / V_j^u$ ：負債のない j 企業の自己資本利益率

負債のある j 企業の自己資本利益率を先の(24)式に代入して整理すると

$$E(\widetilde{X}_j) = R_f(S_j + B_j) + \lambda^*[COV(\widetilde{X}_j, \widetilde{R}_m) - g\,COV(\widetilde{X}_j, \widetilde{R}_a)] \quad (26)$$

となる。また同様にして負債のない場合を考察してみると

$$E(\widetilde{X}_j^u) = R_f V_j^u + \lambda^*[COV(\widetilde{X}_j, \widetilde{R}_m) - g\,COV(\widetilde{X}_j, \widetilde{R}_a)] \quad (27)$$

となり，したがって，$\widetilde{X}_j = \widetilde{X}_j^u$ならば$V_j = V_j^u$となることが(26)，(27)式よりわかる。これより

$$\widetilde{R}_j = \widetilde{R}_j^u(1 + h_j) - R_f h_j \quad (28)$$[10]

ただし

$$h_j = B_j \ / \ S_j$$

が導かれる。この(28)式の両辺の期待値を示せば

$$E(\widetilde{R}_j) = E(\widetilde{R}_j^u) + [E(\widetilde{R}_j^u) - R_f] h_j \tag{29}$$

となり，この(29)式を(24)式によって表すと

$$E(\widetilde{R}_j) = R_f + (1 + h_j) \lambda^* [COV(\widetilde{R}_j^u, \widetilde{R}_m) - g \, COV(\widetilde{R}_j^u, \widetilde{R}_a)] \tag{30}$$

となり，この(30)式は，$\theta = \lambda^* [COV(\widetilde{R}_j^u, \widetilde{R}_m) - g \, COV(\widetilde{R}_j^u, \widetilde{R}_a)$ とおけば，

$$E(\widetilde{R}_f) = R_f + \theta + \theta h_j \tag{31}$$

となる。この(31)式に示されている θ はビジネス・リスクを，θh_j は財務リスクを表している。さらに(30)式より，$COV(\widetilde{R}_j, \widetilde{R}_a) > 0$ の状態の企業においてはそうでない企業よりも低い財務リスクをもつことが分かり，ここにおいてインフレ要因を考慮すべきことが明確に示されている。

また法人税を考慮に入れた場合のインフレ要因を加味した CAPM とMM命題との関連をみると

$$\widetilde{R}_j \equiv \frac{(\widetilde{X}_j - R_f B_j)(1 - T)}{S_j} \quad , \quad \widetilde{R}_j^u \equiv \frac{\widetilde{X}_j^u (1 - T)}{V_j^u}$$

ただし

T：法人税率

とし，この $\widetilde{R}_j$, $\widetilde{R}_j^u$ をそれぞれ(24)式に代入して整理すると

$$\begin{aligned} E(\widetilde{X}_j)(1 - T) = R_f [S_j + B_j (1 - T)] \\ + \lambda^* (1 - T) [COV(\widetilde{X}_j, \widetilde{R}_m) - g \, COV(\widetilde{X}_j, \widetilde{R}_a)] \end{aligned} \tag{32}$$

$$\begin{aligned} E(\widetilde{X}_j^u)(1 - T) = R_f \ V_j^u + \lambda^* (1 - T) \\ [COV(\widetilde{X}_j^u, \widetilde{R}_m) - g \, COV(\widetilde{X}_j, \widetilde{R}_a)] \end{aligned} \tag{33}$$

(32), (33)式より，$\widetilde{X}_j = \widetilde{X}_j^u$ ならば $V_j = V_j^u + TB_j$ が成り立つことがわかり，$E(\widetilde{X}) = (1-T)E(\widetilde{X}_j) + TR_f B_j$ とおくと

$$V_j = \frac{(1-T)E(\widetilde{X}_j)}{E(\widetilde{R}_j^u)} + TB_j = \frac{E(\widetilde{X}_j)}{E(\widetilde{R}_j^u)} + \frac{[E(\widetilde{R}_j^u) - R_f]TB_j}{E(\widetilde{R}_j^u)} \tag{34}$$

となり，したがって

$$\frac{E(\widetilde{X}_j)}{V_j} = E(\widetilde{R}_j^u) - T[E(\widetilde{R}_j^u) - R_f]H_j \tag{35}$$

ただし

$$H_j = B_j / V_j$$

となり，これより

$$\frac{E(\widetilde{X}_j)}{V_j} = R_f + (1 - TH_j)\lambda^*[COV(\widetilde{R}_j^u, \widetilde{R}_m) - g\,COV(\widetilde{R}_j^u, \widetilde{R}_a)] \tag{36}$$

が得られる。これを用いて資本コストとの関連を分析すると

$$\widetilde{R}_j^u \equiv \frac{\widetilde{X}_j^u(1-T)}{V_j^u}, \quad V_j = V_j^u + TB_j \text{ より}$$

$$R_j^u = \frac{(1-T)\widetilde{X}_j^u}{V_j^u} = \frac{(1-T)\widetilde{X}_j}{V_j(1-TH_j)} \tag{37}$$

が得られ，$(1-T)E(\widetilde{X}_j) = E(\widetilde{X}_j) - TR_f B_j$ より

$$\frac{(1-T)E(\widetilde{X}_j)}{V_j} = \frac{E(\widetilde{X}_j)}{V_j} - TR_f H_j \tag{38}$$

となる。(36)式と(37)式を(38)式に代入して整理すると

$$\frac{(1-T)E(\widetilde{X}_j)}{V_j} = R_f(1-TH_j) + \lambda^*[COV(\frac{(1-T)\widetilde{X}_j}{V_j}, \widetilde{R}_m) - g\,COV(\frac{(1-T)\widetilde{X}_j}{V_j}, \widetilde{R}_a)] \tag{39}$$

したがって，法人税を考慮に入れた場合の資本コストは

$$E(\widetilde{R}_z) > K_z^* = R_f(1-TH_z) + \lambda^*[COV(\widetilde{R}_z, \widetilde{R}_m) - g\,COV(\widetilde{R}_z, \widetilde{R}_a)] \tag{40}$$

4．結語にかえて

以上より，資産の収益構造におけるインフレーションの影響が明確となった。

すなわち，株式収益率とインフレ率との共分散の値がゼロよりも大きければ，インフレ要因を加味していない CAPM によって評価された資産ポートフォリオの価値は上方にバイアスをもつことになり，逆にゼロよりも小さければ，資産を過少に評価することが明らかになった。

また，投資プロジェクトの評価は，その収益率と市場全体の収益率との共分散だけでなく，インフレ率との共分散によってもなされるべきであることが明確となり， CAPM に対してインフレ要因を導入することの重要性が理論的に確認できたのである。

〔注〕

1）$U(Y)=Y-CY^2$

$U'(Y)=1-2CY$　　ただし，$C>0$

2）(3)式の右辺を展開すると，

$$\mu-\Upsilon P-2C[\Upsilon W\mu+Z(\mu^2+\sigma^2-\Upsilon P\mu)]+2C\Upsilon P[\Upsilon W+Z(\mu-\Upsilon P)]$$
$$=\mu-\Upsilon P-2C\Upsilon W\mu-2CZ\mu^2-2CZ\sigma^2+2CZ\Upsilon P\mu+2C\Upsilon P\Upsilon W$$
$$+2C\Upsilon PZ\mu-2C\Upsilon\Upsilon PPZ$$
$$=\mu-\Upsilon P-2C\Upsilon W\mu-2CZ\mu^2-2CZ\sigma^2+4CZ\Upsilon P\mu+2C\Upsilon P\Upsilon W-2C\Upsilon^2P^2Z$$

3）$2CZ[\sigma^2+(\mu-\Upsilon P)^2]=(\mu-\Upsilon P)(1-2C\Upsilon W)$

$$2CZ=\frac{\mu-\Upsilon P}{\sigma^2+(\mu-\Upsilon P)^2}(1-2C\Upsilon W)$$

4）文献〔2〕，〔3〕を参照

5）$Z(\mu-\Upsilon P)+\dfrac{\sigma^2}{(\mu-\Upsilon P)^2}Z(\mu-\Upsilon P)+\dfrac{\sigma^2}{(\mu-\Upsilon P)^2}\Upsilon W-\dfrac{\sigma^2}{(\mu-\Upsilon P)^2}\Upsilon W=1/2C-\Upsilon W$

$$Z(\mu-\Upsilon P)\left(1+\frac{\sigma^2}{(\mu-\Upsilon P)^2}\right)=1/2C-\Upsilon W$$

$$Z\left(1+\frac{\sigma^2}{(\mu-\Upsilon P)^2}\right)=\frac{1/2C-\Upsilon W}{\mu-\Upsilon P}$$

$$Z\left(\frac{(\mu-\Upsilon P)^2+\sigma^2}{(\mu-\Upsilon P)^2}\right)=\frac{1/2C-\Upsilon W}{\mu-\Upsilon P}$$

$$Z=\frac{1/2C-\Upsilon W}{\mu-\Upsilon P}\cdot\frac{(\mu-\Upsilon P)^2}{(\mu-\Upsilon P)^2+\sigma^2}$$

6）(11)式は，$\widetilde{\Upsilon}_j=\widetilde{R}_j-\widetilde{R}_a$，$\widetilde{\Upsilon}_b=R_f-\widetilde{R}_a$，$\sum_j B_j=W-\sum_j S_j$ を用いて展開する。

7）このインフレ率は一般物価指数を用いて測定されると仮定する。すなわち

$$\widetilde{R}_a=\frac{PI_{t+1}}{PI_t}-1$$

ただし

PI：一般物価指数

8）$U(\widetilde{Y})=\widetilde{Y}-C\widetilde{Y}^2$

$U'(\widetilde{Y})=1-2C\widetilde{Y}$　　ただし，$C>0$

9）$\sum\sum_K S_K COV(\widetilde{R}_j,\ \widetilde{R}_K)=\sum_K S_K COV(\widetilde{R}_j,\ \widetilde{R}_K)$

$$=COV(\widetilde{R}_j,\ \sum_K S_K\widetilde{R}_K)$$

$$=COV(\widetilde{R}_j,\ \sum_K S_K \widetilde{R}_m)$$

$$=S\ COV(\widetilde{R}_j,\ \widetilde{R}_m)$$

10) $\widetilde{R}_j=(\widetilde{X}_j-R_f\ B_j)\ /\ S_j,\quad \widetilde{R}_j^u=\widetilde{X}_j^u\ /\ S_j^u,$ を用いる。

〈参考文献〉

〔1〕J. Mossin, *Theory of Financial Markets,* Prentice−Hall, 1973

〔2〕H. M. Markowitz, "Portfolio Selection," *Journal of Finance,* 1952, PP.77−91

〔3〕H. M. Markowitz, *Portfolio Selection,* John Wiley & Sons, Inc, 1959, 鈴木雪夫監訳, 「ポートフォリオ選択論」東洋経済新報社　昭和44年

〔4〕A. H. Chen, A. J. Boness, "Effects of Uncertain Inflation on The Investment And Financing Decisions of a Firm," *Journal of Finance,* May 1975, PP.469−483

〔5〕柴川林也, 「新版投資決定論」同文舘　昭和54年

〔6〕　〃　　「財務管理」同文舘　昭和52年